Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Директор КИТП
________________ Н.Е. Мишулина
«20» марта 2025 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

09.02.09 Веб-разработка
Разработчик веб приложений

Владимир, 2025

Методические указания к практическим работам учебной дисциплины профессиональной подготовки «Элементы высшей математики» разработал преподаватель КИТП Тонконог Г.П.

Методические указания к практическим работам рассмотрены и одобрены на заседании УМК специальности 09.02.09 Веб-разработка
протокол № 1 от «10» марта 2025 г.

Председатель УМК специальности _________________ И.Е. Жигалов

Методические указания к практическим работам рассмотрены и одобрены на заседании УМК КИТП
протокол № 8 от «17» марта 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка.

Методические указания подготовлены с целью повышения эффективности профессионального образования и самообразования в ходе практических занятий по учебной дисциплине «Элементы высшей математики».

Методические указания включают в себя учебную цель, перечень образовательных результатов, заявленных во ФГОС СПО, задачи, обеспеченность занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, вопросы для закрепления теоретического материала, задания для практической работы студентов и инструкцию по ее выполнению, методику анализа полученных результатов, порядок и образец отчета о проделанной работе.

Выполнение студентами практических занятий направлено на:

— обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;
— формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;
— развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;
— выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

Цели и задачи практических занятий:

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен **уметь:**
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

знать:
- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков. Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины «Элементы высшей математики», приобретение практических навыков решения примеров и задач.

Раздел 1. Введение в анализ.

Тема 1.1. Последовательность. Предел последовательности.

Числовая последовательность – это числовое множество, поставленное в соответствие множеству натуральных чисел. Каждый член последовательности имеет свой порядковый номер. Числовые последовательности задаются формулой общего члена, например:

(1) $a_n = \frac{1}{n}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$

(3) $a_n = 2n-1$: $1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots$

(4) $a_n = \frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots$

(5) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; $1; \frac{-1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{-1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{-1}{64}; \ldots$

(6) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; $\frac{-1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{-3}{10}; \frac{4}{17}; \frac{-5}{26}; \ldots$

(7) $a_n = \frac{1}{n!}$; $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{24}; \frac{1}{120}; \frac{1}{720}; \ldots$

Числовые последовательности можно определять заданием нескольких первых членов, например:

(8) a_n: 1; -1; 1; -1; 1; -1;…

(9) a_n: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13… -эта последовательность носит название «Числа Фибоначчи», члены этой последовательности получают по рекуррентной формуле $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, при условии, что $a_1 = a_2 = 1$

Рассмотрим последовательность

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ эта последовательность ограничена и монотонна. Она ограничена сверху числом 1, т.к. все ее члены меньше 1, в то же время она возрастает. Таким образом, на интуитивном уровне, можно сделать вывод, что члены этой последовательности *стремятся* к 1. Как понимается последний глагол? Если a $\to$ b, то это означает, что расстояние на числовой прямой между этими числами будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε, т.е. $|a-b| < \varepsilon$.

В этом случае можно сказать, что пределом этой последовательности при n $\to\infty$ является число 1. И записывают это так:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, и читают: предел числовой последовательности $a_n=\frac{n}{n+1}$ равен 1 при n стремящимся к бесконечности.

Число b называется пределом числовой последовательности a_n, если по любому наперед заданному сколь угодно малому положительному числу ε найдется такой номер члена последовательности N, что для всех n > N, будет выполняться неравенство $|a_n-b|<\varepsilon$.

Или (на языке интервалов) …для всех n > N все члены последовательности будут принадлежать интервалу (b - ε; b + ε).

На рисунке видно, что все члены последовательности с номером больше 9 отличаются от b меньше, чем на ε.

Обратим особое внимание студентов на то, что в интервале (b - ε; b + ε) содержится бесконечное число членов последовательности, а вне его – конечное.

Последовательности, которые имеют предел, называются *сходящимися*.

Перечислим без доказательства некоторые свойства пределов последовательностей, записав их на символическом языке математики. Постарайтесь сформулировать их словесно, внести в конспект.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$

5) Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Число e – иррациональное – бесконечная непериодическая дробь:

e ≈ 2,71828182845904523536028947135226…

Примеры вычисления пределов:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{2x}$ = P. Для вычисления указанного предела необходимо в показателе степени иметь $\frac{x}{3}$. Делается это просто и формально, внимательно разберитесь:

P = $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}$ = (ничего не изменив, формально записали в показателе $\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}=1$, но предел $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3}}=$ e), это означает, что P = $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{3}{x}\cdot 2x}=e^6$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^{5x}$ = P (Формируем показатель, не забывая о знаке) P = $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^{-2x\cdot\frac{-1}{2x}\cdot 5x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-5x}{2x}}$ = $e^{\frac{-5}{2}}$.

Вычислить предел числовой последовательности, заданной формулой общего члена

3. $a_n=\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2n}{n+1}}=e^2$. Комментарий. Чтобы выделить 1, в числителе «сформировали» знаменатель и разделили почленно. В показатель добавили 1 в виде $\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)$ и получили результат.

Рассмотрим теперь методику раскрытия неопределенностей вида 1^∞ в точке, как всегда на конкретных примерах.

Вычислить предел: 9. P = $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{1}{x-2}}=$ (выделим в скобках единицу) = $=\lim\limits_{x\to 2}(1+4-2x)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}(1+2(2-x))^{\frac{1}{x-2}}$ = (в показателе выделим выражение обратное выражению 2(2 – x), получим) $=\lim\limits_{x\to 2}(1+2(2-x))^{\frac{1}{2(2-x)}\cdot\frac{2(2-x)}{1}\cdot\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}e^{\frac{4-2x}{x-2}}=e^{-2}$.

Аналогично, но без комментариев.

$$10.\lim_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{2}{x+1}}=\lim_{x\to -1}(1+3+3x)^{\frac{2}{x+1}}=\lim_{x\to -1}(1+3(1+x))^{\frac{2}{x+1}}=$$

$$\lim_{x\to -1}(1+3(1+x))^{\frac{1}{3(x+1)}\cdot\frac{3(1+x)}{1}\cdot\frac{2}{x+1}}=\lim_{x\to -1}e^{\frac{6(x+1)}{x+1}}=e^{6}$$

Теперь попроще и потому покороче

$$11.\lim_{x\to 4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}=\lim_{x\to 4}(1+4-x)^{\frac{2}{x-4}}=\lim_{x\to 4}(1+4-x))^{\frac{1}{4-x}\cdot(-2)}=e^{-2}$$

$$15.\lim_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}=\lim_{x\to -1}(1+(3+3x))^{\frac{3}{x+1}}=\lim_{x\to -1}(1+3(1+x))^{\frac{3}{x+1}}=$$

$$\lim_{x\to -1}(1+3(1+x))^{\frac{9}{3(x+1)}}=e^{9}$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

$5.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; $6.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+5}$; $7.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{4x+1}\right)^{\frac{x}{3}}$; $8.\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{2x+3}\right)^{\frac{x+4}{3}}$

■■■

$12.\lim_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{9x-3}}$ $13.\ \lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$ $14.\lim_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{x^2+2x-8}}$

Контрольные вопросы по теме:

1. Числовая последовательность. Основные понятия. Способы задания.
2. Исследование последовательности на монотонность, ограниченность.
3. Предел числовой последовательности.
4. Свойства пределов.
5. Существование предела ограниченной сверху неубывающей последовательности.
6. Число е, натуральные логарифмы.
7.

Тема 1.2. Функция. Предел функции.

Пусть дана функция f(x) = x^2 + x и известно, что $x\to 2$, т.е. принимает значения достаточные близкие к 2. Очевидно, что f(x) будет принимать значения близкие к 6, т.е. f(2). При этом пишут $\lim_{x\to 2}(x^2+x)=6$, или в общем виде: $\lim_{x\to a}f(x)=b$. И читают: предел функции f(x) при в точке а (или при x стремящемся к а) равен b. (Никогда не говорите «лим» или «лимит»)

Но не все так просто! Рассмотрим функцию: $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x-1}$. Очевидно, что эта функция существует при всех действительных x, кроме x = 1 – обратите на это особое внимание!

Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a, кроме, быть может, в самой этой точке.

Число b называется пределом этой функции в точке x = a (или при $x \to a$), если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству 0 < $|x-a|<\delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пусть функция y = f(x) определена слева от точки x = a.

Число b называется левосторонним пределом этой функции при $x \to a$-, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству $a-x<\delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Аналогично. Пусть функция y = f(x) определена справа от точки x = a.

Число b называется правосторонним пределом этой функции при $x \to a+$, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству $x-a<\delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Говорят, что предел функции существует, если существуют односторонние пределы и они равны: $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$.

Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x (при $x \to \infty$).

Число b называется пределом этой функции при $x \to \infty$, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое значение аргумента x = M, что для всех x > M соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Сформулируем некоторые свойства пределов.

1) $\lim kf(x) = k\lim f(x)$, что означает: постоянный множитель можно выносить за знак предела.

2) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$. Сформулируйте это свойство самостоятельно. Вообще говоря, это свойство можно распространить на алгебраическую сумму конечного числа функций.

3) $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$. Сформулируйте самостоятельно.

4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, *если* $\lim g(x) \neq 0$. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

5) $\lim\limits_{x \to a} P_n(x) = P_n(a)$, это означает, что предел многочлена при $x \to a$ равен значению многочлена в точке x = a.

6) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)}$, *если* $\lim\limits_{x \to a} Q_m(x) \neq 0$. Т.е. предел дробно-рациональной функции равен значению этой функции, если предел знаменателя отличен от нуля.

7) $\lim f(U(x)) = f(\lim U(x))$ - это означает что, предел от сложной функции f(U(x)) равен функции f от предела функции U(x). Например, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln \dfrac{3x+1}{x+5} = \ln(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{x+5}) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln 3 = \ln 3$.

Рассмотрим вычисление пределов функций на бесконечности. Абсолютно так же вычисляются пределы числовых последовательностей.

Ключом к вычислению таких пределов является: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ Вдумайтесь почему: в числителе константа, в знаменателе x, который стремится к бесконечности, в пределе 0.

Или в более общем виде: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$ (*) , где k и n – константы.

Еще ключ для вычисления пределов на бесконечности: $\lim\limits_{x \to \infty} |q|^x = 0$, где $|q|^x < 1$. Так

$\lim\limits_{x \to \infty} 0{,}99^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{3}{4})^x = 0$, а вот $\lim\limits_{x \to \infty} 1{,}000001^x = \infty$

Рассмотрим конкретные примеры.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x^2 + 5x} = 0$ очевидно, в силу (*) 2. $\lim\limits_{x \to \infty} (2x + 3) = \infty$ Пишут знак бесконечности, а говорят «предел не существует». Итак, для закрепления: если переменная *только* в знаменателе, то предел равен нулю, если переменная только в числителе, то предел не существует. Убедитесь, что

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{100^{100}}{0{,}000001x + 1} = 0$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{20000000} = \infty$; 5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{0{,}1x}{0{,}345} = \infty$

Как быть, если переменная, которая стремится к бесконечности, и в числителе и в знаменателе, т.е. и числитель и знаменатель стремятся к бесконечности? В этом случае говорят, что имеем *неопределенность вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$, а сам процесс вычисления пределов называют словосочетанием «*раскрытие неопределенностей*».

Процесс раскрытия таких неопределенностей рассмотрим на конкретных примерах. Пусть необходимо вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+5x}$. Отыскивают старшую степень переменной (в данном случае она, очевидно, вторая) и *делят каждое слагаемое числителя и знаменателя на эту старшую степень переменной*, проводя в уме сокращения.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{x}}$ = (применяя «ключ» и теоремы о пределах, далее имеем) = $\dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$. Заметим, что если под знаком предела содержится переменная, то сам знак предела *записывать обязательно*, в противном случае – нет.

Рассмотрим еще примеры.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-7x+15}{2x^3+5x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{15}{x^3}}{2+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}} = \dfrac{4+0-0+0}{2+0+0} = 2$. Легко видеть, что *если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной*. Поэтому ответ можно писать сразу, не проводя деления:

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+13x^4+8x^3+x^2+3}{2x^6+4x^3+5x} = 2{,}5$ А если степени не равны? Если степень знаменателя выше степени числителя, то в пределе все слагаемые числителя будут равны нулю. В самом деле: 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+11x^2+x+5}{2x^4+3x^2+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{11}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}}{2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}} = \dfrac{0+0+0+0}{2+0+0} = 0.$

Итак, *если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю*.

Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует:

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2+3x+2}{2x^4+7x^2+1} = \dfrac{1+0+0+0}{0+0+0} = \infty.$

Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности.

10. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{5x^2+3x+1}$ 11. $h(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+7}$ 12. $g(x)=\dfrac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x+3}$

13. $w(x)=\dfrac{6x^3+3x+1}{x^3+x+13}$

Рассмотрим теперь методику вычисления пределов в точке. Упрощенно, на первых шагах техники освоения пределов, будем считать, что если функция существует в точке x = a, то ее предел равен f(a). Так, $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)=11;$ $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-3)=-3;$ $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+5x-1)=6$;

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x}{2x-1}=1{,}8;$ $\lim\limits_{x\to 1}\ln\frac{2x+1}{x+3}=\ln\frac{3}{4};$ $\lim\limits_{x\to 2}e^{2x}=e^4$ И т.д.

Рассмотрим наиболее популярный вид – пределы дробно-рациональных функций. Итак, если знаменатель такой функции отличен от нуля, то функция существует в точке, то ее предел равен ее значению в этой точке. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+4}{x^2+1}=3{,}5;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x+5}{x^2+1}=5$

Если же функция в точке x = a не существует, *в знаменателе дроби ноль,* то вычисляем значение числителя в этой точке. При этом, если числитель отличен от нуля, то предел не существует: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}=\infty;$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+1}{x^2-1}=\infty;$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3}{x^3-x^2-4}=\infty$

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при x = a, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель (x – a), на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}=$(выяснили, что при x = 1 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, уже зная один из сомножителей (x – 1), второй сомножитель для квадратного трехчлена нетрудно подобрать устно, не используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители) =

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x-3}=\frac{6}{-2}=-3.$$

Такова методика, которую необходимо четко усвоить. Еще примеры.

15. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{3x^2+2x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+3}{3x-1}=\frac{1}{-4}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-7}{x+5}=\frac{-5}{7}=-\frac{5}{7}$

Активно используйте формулы сокращенного умножения:

17. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+9x-2}{3x^2+5x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(5x-1)}{(x+2)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x-1}{3x-1}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$ 20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}$ 21 $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-6t+8}{t^2+t-6}$

22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 23 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 24 $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

В теории пределов рассматривается несколько видов неопределенностей. Один из них $\infty-\infty$. Действительно, говоря нематематическим языком: «очень много вычесть очень много не означает, что получится ноль». Рассмотрим неопределенность вида $\infty-\infty$ на простом примере.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})$ = (перейдем к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для чего помножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное выражение, а именно $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}$ = (применяя формулы сокращенного умножения, будем иметь) =

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим еще пример раскрытия неопределенностей вида ∞ - ∞ в точке.

P = $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; Очевидно, что пределы и уменьшаемого и вычитаемого не существуют в точке x = 1, значит имеем неопределенность вида ∞ - ∞. Разложим знаменатель второй дроби на множители и приведем к общему знаменателю, таким образом перешли от неопределенности вида ∞ - ∞ к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Сократим дробь и, говорят, «избавимся» от неопределенности. P =

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

По аналогии выполните задания:

1. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{6}{9-x^2}\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

Вычислите пределы аналогичного вида, но на бесконечности.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{x^2+1}\right)$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+3}-x\right)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+3x+17})$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+8x+11}-\sqrt{9x^2+6x+7})$

Рассмотрим вычисление пределов в точке функций, которые не являются дробно – рациональными. Например, таких: P = $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. Легко проверить, что это неопределенность вида $\frac{0}{0}$: и в знаменателе и в числителе нули при x = 3. Методика вычисления таких пределов следующая: помножают числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное в данном случае числителю, т.е. на $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1}$. Знаменатель, естественно, необходимо разложить на множители. Будем иметь.

P = $\lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1})(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (используем формулы сокращенного умножения) = $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x-5-x-1}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ =

$\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-6}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ =

= $\lim\limits_{x\to3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (сокращаем на x – 3 и убеждаемся, что неопределенности уже нет) = $\lim\limits_{x\to3}\frac{2}{(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (проводим вычисления) =

$= \dfrac{2}{(3+3)(\sqrt{3*3-5}+\sqrt{3+1})} = \dfrac{2}{6(2+2)} = \dfrac{1}{12}$. Такова методика. Если разность радикалов в знаменателе, то помножают на выражение, сопряженное знаменателю, например.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x3+7}} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{x3+7})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x3+7})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x3+7})} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{x+5-3x-7} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{-2x-2} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{-2} = \frac{(-1+4)(\sqrt{-1+5}+\sqrt{-1*3+7})}{-2} = \frac{3(2+2)}{-2} = -6$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; 10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$; .11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$; 12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

Решение примеров.

Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3 = e^3$ [неопределенность 1^∞]

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^x = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^{-\frac{x}{4}}\right)^{-4} = e^{-4}$ [неопределенность 1^∞]

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{2x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{x}\right)^2 =$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{\frac{x+1-1}{-1}\cdot(-1)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{1}\right)^{-2} =$$

$= \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\right)^{-2}\cdot 1 = e^{-2}$ [неопределенность 1^∞]

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$ а вот здесь получаем неопределенность $(\infty-\infty)$; перейдем к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$, для этого

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{3}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$$

имеем 1^{∞}, но вторая форма записи второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{5}}=\left(\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot 4}\right)^{\frac{3}{5}}=\left(\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{4\cdot\frac{3}{5}}=e^{\frac{12}{5}}$$

Исследовать функции на непрерывность

$y=\sqrt{25-x^2}$ при $x = 3$.

Применим первое определение непрерывности в точке

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

$y(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 3}\sqrt{25-x^2}=y(3)\Rightarrow$ функция непрерывная в точке $x = 3$

Аналогично

$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ при $x = -1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x}{1+x^2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y(-1)=\frac{2\cdot(-1)}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{1+x^2}=y(-1) \;\Rightarrow$ функция непрерывна в точке $x = -1$

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$	8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{4-7x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x^3+5x}$	9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$	10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{4+x}-2}$	11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$	12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$
6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-3x+9}$	13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{3x^3-5x}$	14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$

Контрольные вопросы по теме:

1. Функция. Понятие функции. График функции. Способы задания.
2. Основные характеристики функции.
3. Обратная функция. Сложная функция.
4. Предел функции в точке и на бесконечности, односторонние пределы.
5. Связь предела функции и предела последовательности. Единственность предела.
6. Свойства предела.

Тема 1.3. Производная функции.

Производной функции f(x) (f'(x_0)) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

f(x)	f'(x)
c – const	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$$1)\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$2)\left(cf(x)\right)' = c \cdot f'(x),\ \text{где } c - const$$
$$3)\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$4)\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Производная сложной функции

Теперь можно установить важное в практических приложениях правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих ее функций.

Теорема 7.3.1. *Пусть задана сложная функция* $z = F(x) = f(\varphi(x))$*; функция* φ *имеет производную в точке* x_0*, а функция* f *имеет производную в точке* $y_0 = \varphi(x_0)$*. Тогда функция* F *имеет производную в точке* x_0 *и*

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Так как функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$\Delta z(\Delta y) = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Если положить $\varepsilon(0) = 0$, то функция $\varepsilon(\Delta y)$ непрерывна в точке $\Delta y = 0$.

Придадим переменной x в точке x_0 малое приращение Δx; оно влечет приращение зависимой переменной z: $\Delta z(\Delta y(\Delta x))$. Итак,

$$\Delta F(x_0) = \Delta z(\Delta y(\Delta x)) = f'(y_0)\Delta y(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y(\Delta x))\Delta y(\Delta x).$$

Разделив на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f'(y_0)\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y(\Delta x))\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (7.3.1)$$

Так как существует $\varphi'(x_0)$, то функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и, следовательно, $\Delta y(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и так как $\Delta y(0) = 0$, то функция $\Delta y(\Delta x)$ непрерывна в точке $\Delta x = 0$. Отсюда сложная функция, как суперпозиция непрерывных функций $\varepsilon(\Delta y(\Delta x))$, непрерывна в точке $\Delta x = 0$.

Теперь, переходя к пределу в (7.3.1) при $\Delta x \to 0$, получим

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Пример. $z = F(x) = e^{\sin x}$,

$$F(x) = f(\varphi(x)), z = e^y = f(y), y = \varphi(x) = \sin x.$$

Тогда

$$F'(x) = e^y(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$$

Пример. Найдем дифференциал функции $z = \arcsin\ln(x^2 + a^2)$:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{d\ln(x^2+a^2)}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}} = \\ &= \frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}\,(x^2+a^2)} = \\ &= \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}\,(x^2+a^2)}. \end{aligned}$$

Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in (a;b)$, то мы можем рассмотреть функцию $f' : (a;b) \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке x значение производной $f'(x)$. Эта функция f' называется производной функции f, или *первой производной* от f. (Иногда саму исходную функцию f называют *нулевой производной* и обозначают тогда $f^{(0)}$.) Функция $g_1(x) = f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках x интервала $(a;b)$, которую мы обозначим $g_1'(x) = f''(x)$ и назовём *второй производной* функции $f(x)$. Если предположить, что вторая производная $g_2(x) = f''(x)$ существует во всех точках $x \in (a;b)$, то она может также иметь производную $g_2'(x) = f'''(x)$, называемую *третьей производной* функции $f(x)$, и т. д. Вообще, n*-й производной* функции $f(x)$ называется производная от предыдущей, $(n-1)$-й производной $g_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = g_{n-1}'(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

если эта производная существует. n-я производная называется также *производной* n*-го порядка,* а её номер n называется *порядком производной*.

При $n = 1; 2; 3$ первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами: $f'(x), f''(x), f'''(x)$ или y', y'', y'''; при прочих n -- числом в скобках в верхнем индексе: $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots$ или $y^{(4)}, y^{(5)}, \dots$.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $f'(x)$ задаёт мгновенную скорость изменения значений $f(x)$ в момент времени x, то вторая производная, то есть производная от $f'(x)$, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть *ускорение* значений $f(x)$. Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, $(f''(x))' = (f'(x))''$).

Пример 1. Найдём вторую производную функции $f(x) = \sin^3 x$. Первая производная равна

$$f'(x) = (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x;$$

далее находим

$$f''(x) = 3(\sin^2 x \cos x)' = 3(2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = 3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Пример 2. Пусть $y = f(x) = e^{kx}$. Тогда

$$y' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}; y'' = k(e^{kx})' = ke^{kx} \cdot k = k^2 e^{kx}; \ldots ; y^{(n)} = k^n e^{kx}; \ldots .$$

При $k = 1$ все производные оказываются равными исходной функции: $(e^x)^{(n)} = e^x.$

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sin x$. Тогда

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x.$$

Поскольку четвёртая производная $y^{(4)}$ совпала с исходной функцией y, то далее значения производных начнут повторяться с шагом 4: при $k = 0; 1; 2; \ldots$ получаем

$$y^{(4k)}(x) = \sin x; y^{(4k+1)}(x) = \cos x; y^{(4k+2)}(x) = -\sin x; y^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

Заметим также, что

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 4\frac{\pi}{2}).$$

Легко видеть, что имеет место общая формула:

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ (называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*) задаётся формулой

$$df(x;dx) = f'(x)dx.$$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении dx аргумента x) как функцию переменного x и найдём её дифференциал $d(df(x;dx)) = d^2 f(x;dx)$:

$$d^2 f(x;dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$, или *дифференциалом второго порядка*. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом*; он задаётся формулой

$$d^3 f(x;dx) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, *n-й дифференциал* $d^n f(x;dx)$, или *дифференциал n-го порядка*, определяется как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении dx); для него имеет место формула:

$$d^n f(x;dx) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Примеры.

1. Найти значение производной функции

$y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение.

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Примеры.

1.Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $y' = (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})' = 3(x^{-1/2})' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

2.$y = x^3 – 3x^2 + 5x + 2$. Найдем $y\,'(–1)$.

$y\,' = 3x^2 – 6x+ 5$. Следовательно, $y\,'(–1) = 14$.

3.$y = \ln x \cdot \cos x$, то $y\,' = (\ln x)\,' \cos x + \ln x\, (\cos x)\,' = 1/x \cdot \cos x – \ln x \cdot \sin x$.

4. $y = \frac{x^3}{\cos x}$, $y' = \frac{\left(x^3\right)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$.

$$y = tgx,$$
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^2 + 4x + 3$;
б) $y = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x};$
в) $y = \frac{x^6 - 4x + 1}{x}$;
г) $y = \frac{3x-4}{3}$;
д) $y = \frac{3x-4}{7-2x}$;
е) $y = 3sin2x$;
ж) $y = \sqrt{x^2 - 4x;}$
з) $y = (3 + 2x)(2x - 3), y'(0{,}25) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = x^3$;
б) $y = cos^2 x$;
в) $y = \ln(3x^2 - 2x + 5)$.

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y = 0$, ось ОУ имеет уравнение $x = 0$);
4. Находят асимптоты графика функции;

5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \qquad (1)$$

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) \qquad (2)$$

Если $k = 0$, то прямая y=b называется ***горизонтальной асимптотой***.

Прямая x =a называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty .$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить производную функции $f'(x)$;
3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует;
4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
5. Если в рассматриваемом интервале
   $f'(x) \pi 0$, то на этом интервале функция убывает;
   $f'(x) \phi 0$, то на этом интервале функция возрастает.
6. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x) = 0$ или не существует;

3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале

   $f''(x)\ \pi\ 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

   $f''(x)\ \phi\ 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;

5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

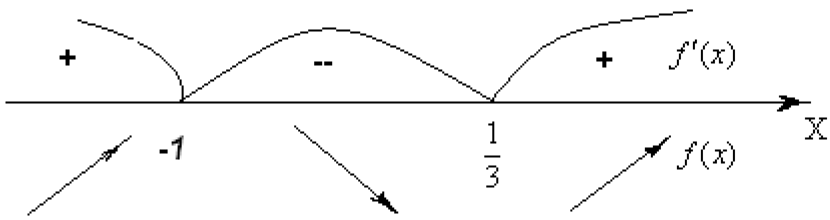
Пример 1: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x^3 - x^2 - x + 1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1$ $и$ $x = 1$.

   Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x = 0$, то $y = -1$;

4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим: $x_1 = -1$ $и$ $x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ $и$ $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$.

Найдем экстремумы функции:

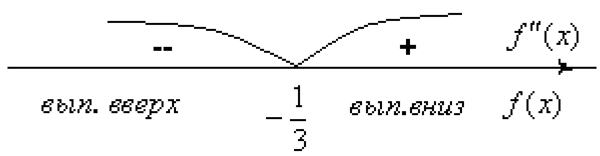
max $f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\ 0)$

min $f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

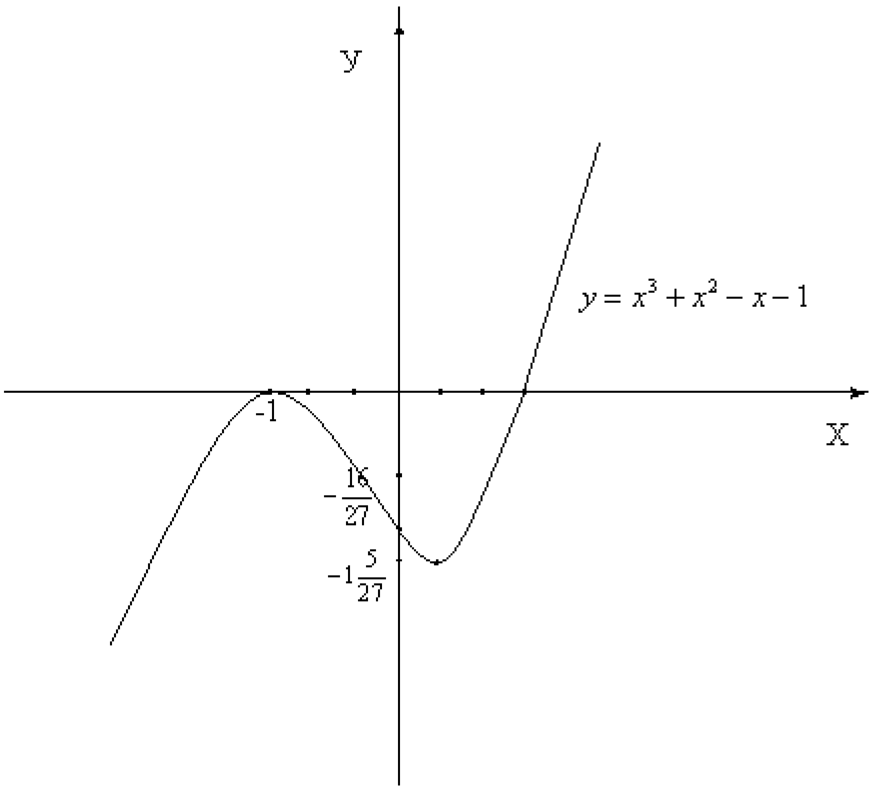
   $6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые

   разбивается область определения



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=-\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3})=-\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

7. Построим график:



Пример 2. Построить график функции y = $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями x ≠ 1, x ≠ -1 (при значениях x ≠ 1, x ≠ -1 знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

D(*f*)=(-∞;1)(-1:1)(1;+∞).

2. Исследуем функцию на честность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=f(\text{x})$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \ge 0$.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,

Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если $x = 0 \quad то \; y = -1$

20

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая x = 1, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Значит, y = 1 – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y'\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

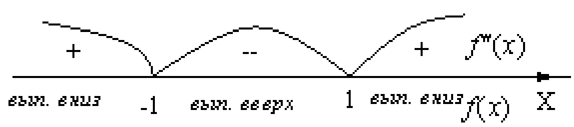
Критические точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ имеем $y' > 0$, а при $x > 0$ имеем $y' < 0$. Значит, x = 0 – точка максимума функции, причем $y_{max} = f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = -1$.

При $x > 0$ имеем $y' < 0$, но следует учесть наличие точки разрыва x = 1. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке [0;1) функция убывает, на промежутке (1;+∞) функция также убывает.

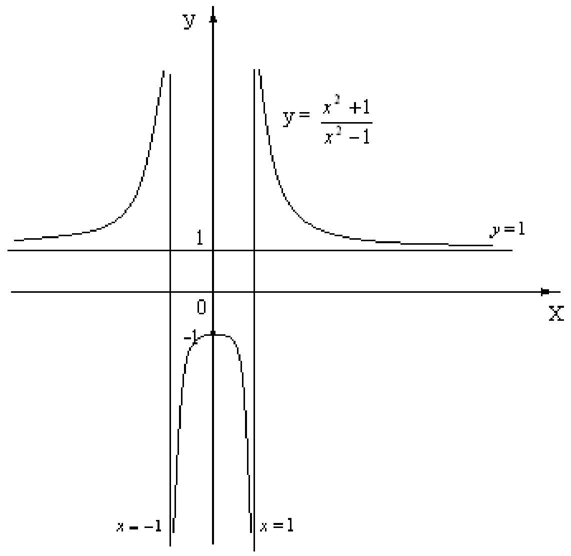
6. Вычислим вторую производную

$$f''(x) = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)$ нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки $x = \pm 1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах:



7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые y = 1 – горизонтальную асимптоту, что x = 1 и x = - 1– вертикальные асимптоты,



1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^x - x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 6x^2$+9x+3.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на промежутке $[2; 3]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.
5. Исследуйте и постройте график данной функции $y = x^3 - x^2 - x + 3$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
10. В чем заключается механический смысл производной?
11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?
12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
13. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?
14. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.

15. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?
16. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
17. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
18. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
19. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

Раздел 2. Элементы линейной алгебры

Тема 2.1. Элементы линейной алгебры.

Матрицей размером $m\times n$ называется совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$2\times 2 \qquad 3\times 3 \qquad 3\times 1 \qquad 1\times 1$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером). Итак, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей A и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Пример. Найти матрицу, транспонированную данной.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц A и B называется матрица C, которая определяется по правилу, например,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

или

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу $kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$ или $(c_{ij}) = (ka_{ij})$.

Для любых чисел a и b и матриц A и B выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Примеры.

1. $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.
2. Найти 2A-B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   $$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C=-3A+4B$.

   Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

Произведением матрицы A не матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице C) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13}, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times p$, то получим матрицу C размера $m\times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

Примеры.

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = AB.$

   Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

   $$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1, \quad c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$$

2. Найти произведение матриц.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+2 & -3-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.
5. Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

   Найти *AB* и *BA*.

   $AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$

   Найти *AB* и *BA*.

   $AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не имеет смысла.

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$

2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0+6=6$.

3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D*= -*A*+*2B* и

$$A=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8-3\cdot(-1)-4\cdot 2=3.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1+2\cdot 4=9$$

Задания для совместной работы.

1. Найдите матрицу C = A + B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу C = A + B, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: 2A + 3B – C, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Произведите умножение двух матриц а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

6. Вычислите определитель третьего порядка $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Запишите все миноры определителя $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Найдите алгебраические дополнения A_{13}, A_{21}, A_{31} для определителя $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

9. Разложите определитель $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ по:

а) элементам первой строки;

б) элементам второго столбца.

10. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, *а* Δ_i *– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца* i *столбцом свободных членов* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Задания для совместной работы.

1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

а) $\begin{cases} 5x + 3y = 12, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - 2y + z = 9, \\ x - 4y - 2z = 3. \end{cases}$

2. Решите систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Крамера

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

Индивидуальная самостоятельная работа №2.

Вариант – 1.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 8 \\ y - 3z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases};$$

Вариант –2.

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = 6; \\ y + z = 7 \end{cases}$$

Вариант –3.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x - y + 3z = -1; \\ y - 2z = 4 \end{cases}$$

Вариант –4.

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 9 \\ 3x - y = 2z = 2; \\ y - 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант –5.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 1 \\ x + y - 5z = 3 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases};$$

Вариант –6.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 5 \\ x - 2z = 0 \\ x + 2y - 6z = 8 \end{cases};$$

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.

20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

Раздел 3. Интеграл и его приложения.

Тема 3.1. Неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции

Это понятие возникает из следующей задачи математического анализа: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$.

Первообразная функция для функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что имеет место равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенный интеграл функции $y = f(x)$ - это совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$.

Обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int -$ *знак интеграла* (это стилизованная латинская буква S, означающая суммирование);

$f(x) -$ *подынтегральная функция*;

$f(x)dx -$ *подынтегральное выражение*;

С – *постоянная интегрирования*, способная принимать любое значение;

x - *переменная интегрирования*.

Интегрирование - *это отыскание первообразной по ее производной. Это действие, обратное дифференцированию.*

Геометрический смысл неопределенного интеграла – это семейство кривых, зависящих от одного параметра , которые получаются путем параллельного сдвига вдоль оси Oy .

Основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где k – постоянная;
5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Основные способы интегрирования

1.Метод непосредственного интегрирования, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

Формулы интегрирования:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \qquad n \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
14. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = arcctgx + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

<u>Задача:</u>Найти неопределенные интегралы:

а) $\int 5x^7dx = 5\int x^7dx = 5\cdot\frac{x^8}{8}+C$.

Метод подстановки или метод замены переменной.

Этот метод является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Положим $x=\varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируемая на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда имеет место следующая формула: $\boxed{\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$.

<u>Задача.</u>Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

$$а)\ \int\cos 3xdx = \begin{cases} 3x=t, & x=\dfrac{t}{3} \\ dx = x'dt = \left(\dfrac{t}{3}\right)'dt = \dfrac{1}{3}dt \end{cases} = \int\frac{1}{3}\cos tdt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

$$б)\ \int\frac{6}{(3x-1)^3}dx = \begin{cases} 3x-1=t, & x=\dfrac{t+1}{3} \\ dx = x'dt = \left(\dfrac{t+1}{3}\right)'dt = \dfrac{1}{3}dt \end{cases} = \int\frac{6}{t^3}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{6}{3}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C = -\frac{1}{t^2}+C = -\frac{1}{(3x-1)^2}+C.$$

$$в)\ \int\frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$$

Замечание: Этот пример допускает следующий общий вывод:

$$\boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right|+C} \text{ или } \boxed{\int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C}$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ определены и непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Чаще всего формула применяется к интегралам вида:

1. $\int P(x)\cdot e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\cdot\sin\alpha xdx$, $\int P(x)\cdot\cos\alpha xdx$, где $P(x)$ - многочлен, $\alpha\neq 0$.

   В этих интегралах $u=P(x)$, $dv=e^{\alpha x}dx$, $dv=\sin\alpha xdx$, $dv=\cos\alpha xdx$.

2. $\int R(x)\cdot\ln xdx$, $\int R(x)\cdot arctg\alpha xdx$, $\int R(x)\cdot arcctg\alpha xdx$, где $R(x)$ - рациональная функция, $\alpha\neq 0$. В этих интегралах $dv=R(x)dx$, $u=\ln x$, $u=arctg\alpha xdx$, $u=arcctg\alpha xdx$.

<u>Задача.</u>Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$а)\ \int x\cdot\cos xdx = \begin{cases} u=x, & dv=\cos xdx \\ du=x'dx=dx & v=\int dv=\int\cos xdx=\sin x \end{cases} =$$

$$= x\sin x - \int\sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$$

б) $\int \ln x dx = \begin{cases} u = \ln x, & dv = dx \\ du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x} & v = \int dv = \int dx = x \end{cases} =$

$= x\ln x - \int x\dfrac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$

3. Содержание работы

<u>Вариант 1.</u>

1. вычислите интегралы методом замены

1) $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3}$

2) $\int \frac{z^2 dz}{1+z^3}$

3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

4) $\int x cos(x^2+1)\, dx$

5) $\int \frac{e^{\varphi} d\varphi}{\sqrt{1-e^{2\varphi}}}$

6) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

2. вычислите интегралы методом интегрирования по частям

1) $\int \arcsin x\, dx$

2) $\int e^x \cos x\, dx$

3.найдите интеграл

$\int \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$

Контрольные вопросы:

1. Первообразная.
2. Теорема о первообразных.
3. Неопределенный интеграл.
4. Простейшие свойства неопределенного интеграла.
5. Таблица неопределенных интегралов.
6. Метод непосредственного интегрирования.
7. Интегрирование подстановкой и по частям в неопределенном интеграле.

Тема 3.2 Определенный интеграл и его приложения.

Определение: Определенный интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Интегральная сумма $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i - произвольная точка существующего отрезка.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(x)$ - подынтегральная функция,

x - переменная интегрирования.

Теорема: Если $F(x)$ - первообразная функция для непрерывной функции $y=f(x)$, т.е. $F(x)'=f(x)$. То имеет место формула: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}$

Определение: Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для $y=f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Задача: Вычислить:

а) $\int_2^3 3x^2dx=3\int_2^3 x^2dx=x^3\Big|_2^3=3^3-2^3=19$

б) $\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=2$

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

3.Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$ *(свойство аддитивности).*

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx=C\int_a^b f(x)dx.$$

6. Если функция $f(x)\ge 0$ всегда на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

7. Если $f(x)\le g(x)$ всюду на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Задача: Вычислить:

а) $\int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx = 3\int_0^3 xdx - \int_0^3 x^2 dx = 3 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5.$

Основные способы вычисления определенного интеграла:

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Метод подстановки или замена переменной.
3. Интегрирование по частям.

Задача. Вычислить:

а) $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx$. На отрезке $\left[-4, -\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx = \int_{-4}^{-\frac{1}{2}} 4xdx + \int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{2dx}{x^2} = \left.\left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)\right|_{-4}^{-\frac{1}{2}} = -28.$$

б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x} = t$. Отсюда находим новые пределы интегрирования: $t_1 = 1$ при $a = 0$ и $t_2 = 4$ при $b = 5$. Подставляя, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \begin{cases} \sqrt{1+3x} = t, \\ 1+3x = t^2, \\ x = \dfrac{t^2-1}{3}, \\ dx = \dfrac{2t}{3}dt \end{cases} = \int_1^4 \frac{\left(t^2-1\right)\cdot 2tdt}{3\cdot t\cdot 3} = \frac{2}{9}\int_1^4 \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^4 - \left.\frac{2}{9}\cdot t\right|_1^4 = 4.$$

в) Интегрируем по частям.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx = \begin{cases} u = \arccos 2x, \\ du = -\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \\ dv = dx, \\ v = x \end{cases} = \left[\int_a^b udv = \left.uv\right|_a^b - \int_a^b vdu\right] = \left.\left(x\cdot\arccos 2x\right)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right) - \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\left(1-4x^2\right)}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left.\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$

Вычислите:

1. $\int\limits_{2}^{3} x^3 dx$ 2. $\int\limits_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$

3. $\int\limits_{0}^{3} \left(x^2 + 4x - 1\right) dx$ 4. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{2}{x^3} + 8\right) dx$

5. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$

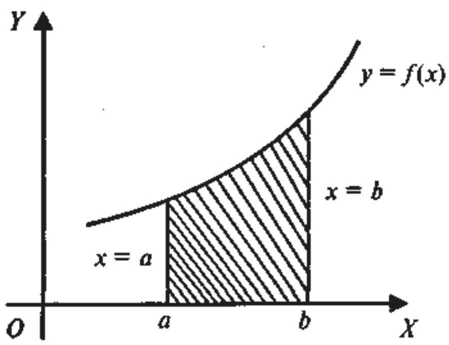
7. $\int\limits_{1}^{2} (1 - x)^3 dx$ 8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{x}{2} dx$

9. $\int\limits_{0}^{3} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} + 3x^2\right) dx$ 10. $\int\limits_{0}^{4} e^{0,5x-1} dx$

Геометрический смысл определённого интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), выражается определённым интегралом:

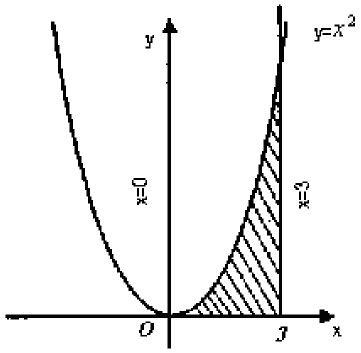
$$S = \int\limits_{a}^{в} f(x) dx$$



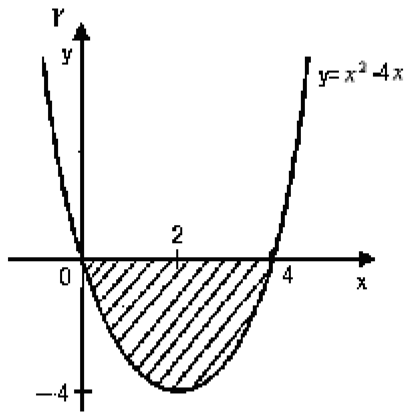
Примеры:

1. Определить площадь S фигуры, заключённой между ветвью кривой $y = x^2$, осью OX и прямыми $x = 0, x = 3$ (рис.2).

Решение: $S = \int\limits_{0}^{3} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right| = 9(кв.ед.)$



2) Найти площадь S фигуры, заключённой между осью OX и кривой $y = x^2 - 4x$ (рис.3)



36

Решение: рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью OX:

$y = 0$; $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x\,(x - 4) = 0$; $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ или $x_2 = 4$.

Найдём производную функции $y' = 2x - 4$, и точки экстремума:

$y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x - 4 = 0$; $\Leftrightarrow$ $x = 2$; $y'' = 2 > 0$; $\Leftrightarrow$ $x = 2$ – точка min; $y(2) = -4$.

Искомая площадь ограничена сверху осью OX, снизу графиком функции $y = x^2 - 4x$, слева прямой $x = 0$, справа прямой $x = 4$. Так как на отрезке $[0;4]$ $y < 0$, то

$$S = \left|\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{2} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями $y = x^3$, $x = -1$. $x = 2$ и осью OX

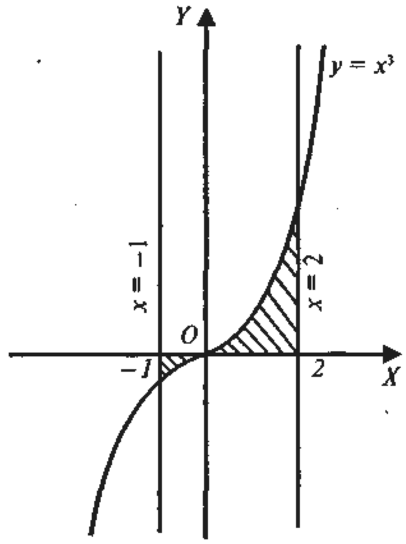


рис.4

Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью ОХ(см. рис 4):

$y = x^{3;}$ $y = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0;$ Вычислим производную функции: $y' = 3x^{2;}$ $y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$. Найдем значение второй производной в точке $x=0$: $y'' = 6x;$ $y''(0) = 0$. Вычислим $y''(-1) = -=6;$ $y''(1) = 6;$ $\Leftrightarrow$ Т.к. y'' меняет знак при переходе через $x =0$ $\Leftrightarrow$ т. $(0;0)$ – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = \int_0^2 x^3dx + \left|\int_{-1}^0 x^3dx +\right| = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 + \left|\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^0\right| = 4 + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = 4\frac{1}{4} \text{ (кв.ед.)}$$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.

1. $y = -x^2 + 4; y = 0.$
2. $y = sinx; x = 0; y = 0.$
3. $y = x^2; y = 9.$

Контрольные вопросы:

1. Что такое определенный интеграл?
2. Что в записи $\int_a^b f(x)$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$?
3. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.
7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Раздел 4. Комплексные числа

Тема 4.1 Понятия и представления комплексных чисел.

1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение: комплексным числом называется число вида $z = a + bi, a, b$ действительные числа, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Определение: Число a называется действительной частью комплексного числа.

Обозначение: $a = Re\, z$.

Определение: Число bi называется мнимой частью комплексного числа, b- коэффициент мнимой части.

Обозначение: $b = Im\, z$.

Определение: $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным с $z = a + bi$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + dci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$

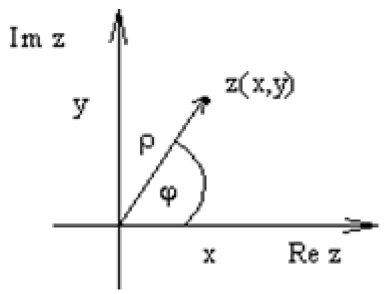
4. Деление (при делении комплексных чисел, числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac - bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

5. Возведение в степень $z_1^2 = (a + bi)^2 = \begin{cases} \text{по формуле} \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases} = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

2. Геометрическая форма комплексного числа

Определение: геометрическая интерпретация комплексного числа состоит в том, что комплексному числу $z = x + yi$ ставится в соответствие точка с координатами (x, y) на координатной плоскости таким образом, что действительная часть представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки.



Определение: модулем комплексного числа называется абсолютная величина вектора соответствующего этому числу.

Обозначение: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение: аргументом комплексного числа $z \neq 0$называется величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором, соответствующим данному числу.

Обозначение: $\varphi = \arg z, \arg(x + yi)$.

Алгоритм нахождения аргумента комплексного числа $z = x + yi$:

1. Найти острый угол $\alpha = arctg \left|\frac{y}{x}\right|$.

2. Найти аргумент комплексного числа в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит вектор, соответствующий этому числу:

- I четверть $\varphi = \alpha$
- II четверть $\varphi = \pi - \alpha$
- III четверть $\varphi = \pi + \alpha$
- IV четверть $\varphi = 2\pi - \alpha$

3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Если обозначить через rрасстояние точки (x, y)от начала координат, через φ угол наклона к положительной оси Oxвектора, идущего из начала координат в точку (x, y), то

$x = rcos\ \varphi$

$y = r \sin \varphi$

$x + yi = r(cos\ \varphi + i \sin \varphi)$ – тригонометрическая запись комплексного числа

$z = |z| \cdot (\cos \arg(z) + isinarg\ (z))$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + isin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + isin\varphi_2)$

1. Умножение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2. Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$

3. Возведение в степень $z^n = \big(r(\cos \varphi + isin\ \varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + isin\ n\varphi)$

4. Извлечение из под корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\big(r(\cos \varphi + isin\varphi)\big)}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень}, k$$
$$= 0,1, \ldots . n - 1$$

4. Решение квадратных уравнений с комплексными числами

Замечание: одно из причин введения комплексного числа состоит в том, чтобы добиться разрешимости любого квадратного уравнения:

Значение $D = b^2 - 4ac$	Корни уравнения
$D > 0$	Уравнение имеет два различных действительных корня $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$D = 0$	Уравнение имеет один действительный корень $$x = \frac{-b}{2a}$$
$D < 0$	Уравнение имеет два различных (сопряженных) мнимых корня $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}i}{2a}$$

<u>Задача.</u> Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2, если $z_1 = 10 + 5i$и $z_2 = 3 - 4i$.

<u>Решение.</u>

$z_1 + z_2 = (10 + 5i) + (3 - 4i) = 13 - i$

$z_1 - z_2 = (10 + 5i) - (3 - 4i) = 7 + 9i$

$z_1 \cdot z_2 = (10 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 30 - 40i + 15i + 20 = 50 - 25i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(10 + 5i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{30 - 15i + 40i + 20i^2}{3^2 - (4i)^2} = \frac{10 + 55i}{25} = 0{,}4 + 2{,}2i$$

$z_1^2 = (10 + 5i)^2 = 100 + 100i - 25 = 75 + 100i$

<u>Задача.</u> Записать число $z = -\sqrt{3} - i$в тригонометрической форме

<u>Решение.</u>

1. Находим $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

2. Находим α, $\alpha = arctg \left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

3. IIIчетверть $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

4. $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + isin\,\frac{7\pi}{6}\right)$

<u>Задача.</u> Найти $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 12(\cos 225° + isin225°)$ и $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 75° + isin75°)$

<u>Решение.</u>

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \frac{3}{2}(\cos(225° + 75°) + isin(225° + 75°)) = 18(cos300° + isin300°)$$

$$= 18\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 9\sqrt{3}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 12 \cdot \frac{2}{3}(\cos(225° - 75°) + isin(225° - 75°)) = 8(cos150° + isin150°)$$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i$$

<u>Задача.</u>Вычислить $\sqrt[4]{-81}$, если $-81 = 81(\cos\pi + isin\pi)$

<u>Решение.</u> $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81(\cos\pi + isin\pi)} = \sqrt[4]{-81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\ \frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3$

$$z_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{2}$$

<u>Задача.</u>Решить уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$и $z^2 - 3iz + 4 = 0$ во множестве комплексных чисел

<u>Решение.</u>

$$x^2 - 4x + 5 = 0z^2 - 3iz + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -4 < 0D = 9i^2 - 16 = -25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}i}{2a} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm ix_{1,2} = \frac{-3i \pm 5i}{2} = i\text{или} - 4i$$

Задача 1. Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_2}{z_1}, z_1^2$, если $z_1 = 1 - i$и $z_2 = 4i - 2$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 4 + 4i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^9.

Задача 4. Выполните действия $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\ \frac{\pi}{2}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\ \frac{\pi}{6}\right)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$

Определение: степень e^zс комплексным показателем $z = x + iy$определяется равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Замечание: можно доказать, что $e^z = e^x(\cos y + isin\ y)$, т.е. $e^{x+iy} = e^x(\cos y + isin\ y)$.

В частности, при $x = 0$получается соотношение $e^{iy} = \cos y + isiny$, называемой формулой Эйлера.

Замечание: для комплексных показателей остаются в силе основные правила действий с показателями; например, при умножении чисел показатели складываются, при делении – вычитаются, при возведении в степень – перемножаются.

Замечание:показательная функция имеет период, равный $2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi i} = e^z$. При $z = 0$, получим $e^{2\pi i} = 1$.

Определение: тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + isin\,\varphi$можно заменить показательной формой: z=$re\varphi i$.

Действия над комплексными числами в показательной форме

1. $r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_1 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

2. $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3. $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$

4. $\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}$ $(k = 0,1,2, \dots n-1)$

Замечание: формула Эйлера устанавливает связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

$e^{\varphi i} = cos\varphi + isin\varphi, e^{-\varphi i} = cos\varphi - isin\varphi$.Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$cos\varphi = \frac{\left(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}\right)}{2}$$

$$cos\varphi = \frac{\left(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}\right)}{2i}$$

Задача. Найти $e^{\frac{i\pi}{4}}$

Решение. По формуле, найдем$e^{\frac{i\pi}{4}} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача. Представить в показательной форме числа: 1) $z = 2i$; 2) $z = -1 + i$

Решение. 1) Здесь $a = 0, b = 2, r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}$. По формуле, получим $z = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$

2) Здесь $a = -1, b = 1, r = \sqrt{2}, tg\varphi = -1, \varphi = \frac{3\pi}{4}$ По формуле, получим $z = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Задача. Представив числа $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$в показательной форме, вычислить:

1)$z_1 \cdot z_2$; 2)z_1/z_2; 3) z_1^6; 4) $\sqrt[4]{z_1}$

Решение. Для числа $z_1 = 1 + i$ имеем: $a = 1, b = 1, r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.По формуле, получим $z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Для числа $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ имеем: $a = 1, b = -\sqrt{3}, r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.По формуле, получим $z_2 = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

1) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot 2e^{\frac{-i\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}-(-\frac{i\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$

3) $z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^6 = 8e^{i3\pi/2}$

4) $z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\frac{i}{4}}, k = 0,1,2,3$

Если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{i\pi}{16}}$

Если $k = 1$, то $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\frac{i}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}}$

Если $k = 2$, то $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)\frac{i}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{-15\pi i}{16}}$

Если $k = 3$, то $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+6\pi\right)\frac{i}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{-7\pi i}{16}}$

Задача 1. Найдите $e^{\frac{i\pi}{2}}$

Задача 2. Представьте в показательной форме числа 1) $3 + i\sqrt{3}$

Задача 3. Представив числа $z_1 = \sqrt{3} + i$и $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$в показательной форме, вычислите: 1)$z_1 \cdot z_2$; 2)z_2/z_1; 3) z_2^4; 4) $\sqrt[3]{z_1}$; $\sqrt[4]{z_2}$

Задача 4. Вычислите $\sqrt[4]{i}$

Задача 5. Решите уравнение $x^3 - 8 = 0$

Контрольные вопросы по теме.

1. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
   Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.
2. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.
3. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.
4. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.
5. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.
6. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?
7. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
8. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в показательной форме.
9. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме.
10. Как возвести в степень комплексное число, записанное в показательной форме?
11. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.
12. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в показательной форме.
13. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

Раздел 5. Дифференциальные уравнения.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение: дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.
Обозначение: $F(x,y,y')=0, F(x,y,y'')=0, F\left(x,y,y',y'',..,y^{(n)}\right)=0.$
Определение: дифференциальным уравнением называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.
Определение: порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.
Определение: решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.
Определение: общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.
Замечание: общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.
Определение: частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных.
Замечание: значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.
Определение: дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.
Определение: дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$$

Далее проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx$$

<u>Задача.</u> Найти общее решение уравнения $x(1+y^2)dx=ydy$.
<u>Решение.</u> Разделив переменные, имеем

$$xdx=\frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx=\int\frac{ydy}{1+y^2};\ \ \frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln C$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2=\ln[C(1+y^2)]$. Это и есть общее решение данного уравнения.
<u>Задача.</u> Найти частное решение уравнения $s\,tgt\,dt+ds=0$, удовлетворяющее начальным условиям $s=4$при $t=\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив переменные, имеем $tgt\,dt + \frac{ds}{s} = 0.$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tgtdt + \int \frac{ds}{s} = \ln C;\ -\ln cost + \ln s = \ln C$$

или $\ln s = \ln C + \ln cost, \quad s = Ccost$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = {}^{\pi}/_{3}$и $s = 4$в выражение для общего решения:

$$4 = Ccos\left(\frac{\tilde{\pi}}{3}\right), \text{или } 4 = {}^{C}/_{2}, \text{откуда } C = 8$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеем вид $s = 8cost.$

1. Найти общие решения уравнений

1)$xydx = (1 + x^2)dy$

2) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$

3) $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$

2. найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}; y = 2$ при $x = 0$

2) $(1 + y)dx = (1 - x)dy; \quad y = 3$ при $x = -2$

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; -1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = {}^{1}/_{2y}$.

Однородные уравнения

Определение однородного дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

для всех значений *t*. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией порядка по отношению к переменным *x* и *y*:

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

или через дифференциалы:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − однородные функции одинакового порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение линейного уравнения первого порядка
Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции x, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Решите ДУ :

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x-1}$;
2. $y' = x$, если $y = 0$ при $x = 2$;
3. $(1 + x^3)dy = 3x^2 y dx$.

Раздел 6. Элементы аналитической геометрии.

Тема 6.1 Элементы аналитической геометрии на плоскости.

Прямые на плоскости могут быть заданы следующими уравнениями:

1. Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, где A и B - координаты нормального вектора.

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный данной прямой, называется нормальным $\vec{n} = (A; B)$.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(A; B)$, т.е. $\vec{n} \perp \overrightarrow{MM_0}$, значит $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0$, где $M(x; y)$ - текущая точка прямой l. И в координатной форме $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$$l : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

4. Параметрические уравнения прямой.

Любой вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$, определенный прямой l, называется направляющим вектором.

Пусть прямая l проходит через 2 точки $M(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$. t - параметр, принимающий различные числовые значения.

$$\boldsymbol{x = x_0 + a_1 t}$$

$$\boldsymbol{y = y_0 + a_2 t}$$

5. Каноническое уравнение прямой.

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$, параллельно вектору $\vec{a}(a_1; a_2)$

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси O_x, называется угловым коэффициентом, т.е. $tg\,\alpha = k$.

Пусть даны 2 точки прямой $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, тогда $k = \frac{y_2 - y_1}{}$.

$-x_1$

Угол между прямыми, заданными

1. общими уравнителями.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнителями

$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$l_2 : A_2 + B_2 y + C_2 = 0$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$;

2. уравнениями с угловым коэффициентом.

$l_1 : k_1 x + b_1$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{|k_1 \cdot k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^2 + 1}}$;

$l_2 : k_2 x + b_2$

3. Каноническими уравнениями.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$l_1 : \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2}$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

$l_2 : \dfrac{x - x_2}{b_1} = \dfrac{y - y_2}{b_2}$

Условия перпендикулярности прямых, заданных

1. общими уравнениями.

$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$;

2. уравнениями с угловым коэффициентом. $k_1 \cdot k_2 = -1$;

3. каноническими уравнениями.

$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

Пример 1. Найти угол между прямыми $l_1 : 5x - 12y - 16 = 0$ и $l_2 : 3x + 4y - 12 = 0$.

Решение. Прямые l_1 и l_2 заданы общим уравнением, поэтому используем формулу

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

У нас $A_1 = 5$, $B_1 = -12$, $A_2 = 3$, $B_2 = 4$, подставляя в формулу получаем

$$\cos\varphi = \frac{5 \cdot 3 - 12 \cdot 4}{\sqrt{5^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{33}{65};\ \varphi = \arccos\frac{33}{65} \approx 59{,}5^\circ.$$

Пример 2. При каком значении параметра k прямые $l_1 : y = 5x + 4$ и $l_2 : y = kx - 2$ перпендикулярны?

Решение. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами. Условие перпендикулярности имеет вид $k_1 \cdot k_2 = -1$.

У нас $k_1 = 5$, k_2 - неизвестно, значит $5 \cdot k_2 = -1$, $k_2 = -\frac{1}{5}$.

Пример 3. Вычислить угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{5}$; $l_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3}$.

Решение. Косинус угла между прямыми будем вычислять по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|1\cdot 5 - 5\cdot 3|}{\sqrt{1^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

Пример 4. В треугольнике с вершинами в точках $M_1(-5;2)$, $M_2(5;6)$, $M_3(-1;2)$ проведена медиана M_1A_1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A_1 перпендикулярно медиане M_1A_1.

Решение. За нормальный вектор искомой прямой можно принять вектор $\vec{n} = \overrightarrow{M_1A_1}$. Чтобы найти координаты вектора n, найдем координаты точки A_1; точка A_1 - середина отрезка M_2M_3, поэтому $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$; $y_1 = \frac{6-2}{2} = 2$.

Вектор $\vec{n} = M_1A_1$ имеет координаты $3-(-5) = 8$ и $2-2=0$, т.е. $\overrightarrow{M_1A_1}(8;0)$. Уравнение искомой прямой ищем как уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору $8(x-3)+0(y-2)=0$, $x=3$.

Пример 5. Найти координаты точек пересечения прямых $l_1: x+y-3=0$ и $l_2: 3x+2y-9=0$.

Решение. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 3x+2y-9=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3-y \\ 3(3-y)+2y-9=0 \end{cases} \quad y=0;\ x=3.$$

Ответ: точка $A(3;0)$.

1. Проверьте принадлежат ли точки А (3; 14), В(4; 13), С(-3;0), Д(0; 5) прямой 7х-3у+21=0.
2. Постройте прямые: 1) х = 5; х = -3, х=0; 2) у = 4, у = -2, у = 0.
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М (2; -4) и перпендикулярной вектору $\vec{n}$= (4; 2).
4. Вычислите длину отрезка прямой 3х + 4у – 24 = 0, заключенного между осями координат.
5. На прямой 2х + у – 6 = 0 найдите точку М, равноудаленную от точек А(3; 5) и В(2; 6).
6. Вычислите углы наклона к оси Ох для прямых: 1) у = х; 2) у = -х.
7. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат, если её угловой коэффициент: 1) k = 6; 2) k =-2.
8. Найдите острый угол между прямыми 5х – 2у -16 = 0 и 3х+4у – 12 = 0.
9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М (-2; -4) параллельно прямой 2х -3у + 16 = 0.
10. Проверьте, перпендикулярны ли следующие прямые:

1) 3х – 4у + 12 = 0 и 4х+ 3у – 6 = 0;
2) 4х + 4у – 8 = 0 и 3х – 2у + 4 = 0.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется, уравнением прямой?
2. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
3. Как записывается каноническое уравнение прямой?
4. Запишите уравнения осей координат.
5. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
6. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
7. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Сформулируйте условие параллельности прямых.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
10. Как найти угол между прямыми?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дадаян, А. А. Математика : учебник / А. А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М. URL: https://znanium.ru/catalog/product/2132236 (дата обращения: 10.03.2025).
2. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. — 10-е изд., стер. — М. : ИНФРА-М. URL: https://znanium.ru/catalog/product/2124772 (дата обращения: 10.03.2025).
3. Шипачев, В. С. Начала высшей математики : учебное пособие / В. С. Шипачев. — 5-е изд., стер. — СПб : Лань. URL: https://e.lanbook.com/book/211175 (дата обращения: 10.03.2025).
4. Гарбарук, В. В. Решение задач по высшей математике. Интенсивный курс для студентов технических вузов : учебное пособие для вузов / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, М. А. Шварц. — 2-е изд., стер. — СПб : Лань. URL: https://e.lanbook.com/book/189331 (дата обращения: 10.03.2025).
5. Сапожников, П. Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: учебное пособие / П.Н. Сапожников, А.А. Макаров, М.В. Радионова. — М. : КУРС: ИНФРА-М. URL: https://znanium.ru/catalog/product/1036516 (дата обращения: 10.03.2025).